

Um estudo sobre a localização dos zeros de polinômios gerados por uma relação de recorrência José Augusto Coelho, Alagacone Sri Ranga – Matemática - Depto de Ciências de Computação e Estatística - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto.

Considere a sequência de polinômios $\{Q_m\}$ gerados pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos α_m e β_m são tais que $\alpha_{m+1} \neq 0$, $\beta_m \neq 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$

Esta relação foi bastante estudada quando

$$\alpha_{m+1} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_{m+1} > 0 \quad \text{para} \quad m \geq 1. \quad (2)$$

Citamos o artigo de Jones, Thron e Waadeland [1] que motivou o estudo deste caso especial de relação de recorrência (1) e o artigo [3] para algumas referências adicionais.

Quando as relações (2) valem, em [1] mostrou-se que os correspondentes polinômios satisfazem à propriedade de L-ortogonalidade, isto é, à propriedade (3) de ortogonalidade de Laurent:

$$\int_a^b t^{-m+s} Q_m(t) d\phi(t) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3)$$

onde $d\phi$ é uma distribuição forte em $[a, b]$, $-\infty < a < b \leq \infty$. Qualquer distribuição em $[a, b]$, tal que os momentos $\mu_m = \int_a^b t^m d\phi(t)$ existem para todo m inteiro é chamada de distribuição forte.

Os polinômios de Szegő satisfazem ao seguinte sistema de relações de recorrência (dada em termos dos polinômios mônicos):

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= zS_n(z) + a_{n+1}S_n^*(z), \\ (1 - |a_{n+1}|^2)zS_n(z) &= S_{n+1}(z) - a_{n+1}S_{n+1}^*(z), \end{aligned}$$

para $n \geq 0$, onde $S_n^*(z) = z^n \bar{S}_n\left(\frac{1}{z}\right)$ são os polinômios recíprocos. Os números $a_n = S_n(0)$, $n \geq 1$, são os coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő.

Os coeficientes de reflexão satisfazem à seguinte propriedade: $|a_n| < 1$ para $n \geq 1$. Portanto, os zeros dos polinômios de Szegő estão todos dentro do disco unitário aberto.

Se os coeficientes de reflexão são tais que $0 < |a_n| < 1$, então os polinômios de Szegő satisfazem

$$S_{n+1}(z) = \left(z + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)S_n(z) - \frac{a_{n+1}}{a_n}(1 - |a_n|^2)zS_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

onde $S_1(z) = z + \frac{a_1}{a_0}$, com $a_0 = 1$. Portanto, os polinômios de Szegő satisfazem à relação de

recorrência dada em (1) com $\beta_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ e $\alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}(1 - |a_n|^2)$, $n \geq 1$.

Baseado no artigo de Silva e Sri Ranga [2], neste trabalho estudamos a localização dos zeros de polinômios gerados por relações de recorrência da forma (1). Como os zeros são estudados através de um problema de autovalor associado a uma matriz de Hessenberg, foram encontrados limitantes para as regiões onde os zeros estão localizados em termos dos coeficientes da relação de recorrência, dados pelos teoremas a seguir.

Teorema 1: Os zeros de Q_n são os auto-valores da matriz de Hessenberg H_n , onde

$$H_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix},$$

com $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, n$ e $\alpha_1 = 0$.

Teorema 2: Para todo $n \geq 2$, seja $\alpha_n^M = \max_{2 \leq k \leq n} \{|\alpha_k|\}$ e $\eta_n^M = \max_{2 \leq k \leq n} \{|\eta_k|\}$.

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}}, \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M} \text{ e } d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{\sqrt{\alpha_n^M} + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}.$$

Então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estão dentro do disco $|z| \leq \hat{\rho}_n$, onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1, \\ \left(\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M} \right)^2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se η_k , para $k = 1, 2, \dots, n$, forem reais, então os zeros de Q_k , $1 \leq k \leq n$, estarão dentro da região $W(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$, onde $\eta_{n,1} = \min_{1 \leq k \leq n} \{\eta_k\}$, $\eta_{n,2} = \max_{1 \leq k \leq n} \{\eta_k\}$ e

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)} + \alpha_n^M}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ \left(\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M} \right)^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

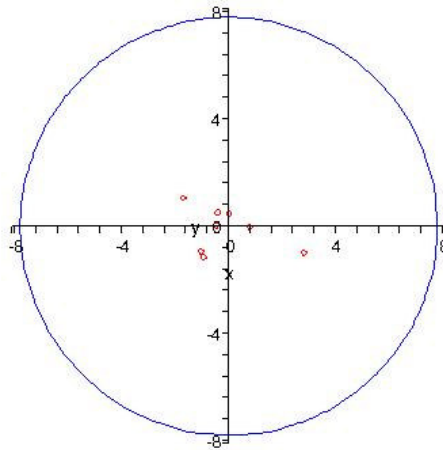


Figura 1

Como exemplo, aplicamos os resultados a polinômios de Szegő e para-ortogonais. Esses últimos polinômios são definidos como $R_n^{(1)} = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)}$ e $R_n^{(2)} = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{1 - S_n(0)}$. Além disso, satisfazem a relação de recorrência $R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - \alpha_n^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z)$, $n \geq 1$ e $i=1,2$, onde $\alpha_{n+1}^{(1)} = (1+a_{n-1})(1-a_n)$ e $\alpha_{n+1}^{(2)} = (1-a_n)(1+a_n)$, $n \geq 1$.

A Figura 1 acima mostra a localização dos zeros de um polinômio para-ortogonal de grau 8. Observe que os zeros estão localizados dentro do círculo de raio 8, que é a região dada no Teorema 2.

Referências:

- [1] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 261, pp. 503-528 (1980).
- [2] A.A Silva, A. Sri Ranga, Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 397, pp. 299-324 (2005).
- [3] A. Sri Ranga, W. Van Assche, Blumenthals theorem for Laurent orthogonal polynomials, *Journal of Approximation Theory*, vol. 117, pp. 255-278 (2002).